

Calcolo combinatorio

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Il **calcolo combinatorio** è il termine che denota tradizionalmente la branca della [matematica](#) che studia i modi per raggruppare e/o ordinare secondo date regole gli elementi di un [insieme](#) finito di oggetti. Il calcolo combinatorio si interessa soprattutto di contare tali modi, ovvero le **configurazioni** e solitamente risponde a domande quali "Quanti sono...", "In quanti modi...", "Quante possibili combinazioni..." eccetera.

Più formalmente, dato un insieme S di n oggetti si vuole contare le configurazioni che possono assumere k oggetti tratti da questo insieme. Prima di affrontare un problema combinatorio bisogna capire due fatti importanti:

- Se l'*ordinamento* è importante, ovvero se due configurazioni sono le stesse a meno di un riordinamento ($\{x,y,z\}$ è uguale a $\{z,x,y\}$?)
- Se si possono avere più *ripetizioni* di uno stesso oggetto, ovvero se uno stesso oggetto dell'insieme può o meno essere riusato più volte all'interno di una stessa configurazione.

Permutazioni

Permutazioni semplici (senza ripetizioni)

Una [permutazione](#) di un insieme di oggetti è una presentazione ordinata, cioè una sequenza, dei suoi elementi nella quale ogni oggetto viene presentato una ed una sola volta. Per contare quante siano le permutazioni di un insieme con n oggetti, si osservi che il primo elemento della configurazione può essere scelto in n modi diversi, il secondo in $(n-1)$, il terzo in $(n-2)$ e così via sino all'ultimo che potrà essere preso in un solo modo essendo l'ultimo rimasto. Dunque, indicando con P_n il numero delle possibili permutazioni di un insieme di n elementi, si ottiene che esse sono esattamente $n!$ ([fattoriale](#)):

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Ad esempio le permutazioni degli elementi dell'insieme $\{a,b,c\}$ sono $3! = 6$: $abc, bac, bca, cab, cba, acb$.

Per completare meglio la definizione di fattoriale fissiamo anche i valori seguenti:

$1! = 1$ e $0! = 1$.

Permutazioni con ripetizioni (o meglio con elementi indistinguibili)

In alcuni casi un insieme può contenere elementi che si ripetono. In questo caso alcune permutazioni di tali elementi saranno uguali tra loro. Indicando con k_1, k_2 fino a k_r il numero di volte che si ripetono rispettivamente gli elementi $1, 2$ e r , le permutazioni uniche (non ripetute) divengono:

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!}$$

Si tratta, infatti, di dividere il numero delle distinte permutazioni di n oggetti per il numero delle permutazioni di $k_1!$ presenze di uno stesso elemento, tutte uguali tra loro, poi per il numero delle permutazioni di $k_2!$ presenze di uno stesso elemento, ecc.

La formula vale in realtà per qualsiasi permutazione, anche senza ripetizioni di elementi. Infatti, se assumiamo k_1, k_2 fino a k_r uguali ad 1 (cioè gli elementi si ripetono una sola volta), otteniamo esattamente la formula delle permutazioni semplici, perché si ha:

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_r!} = \frac{n!}{1! \cdot \dots \cdot 1!} = n!$$

Disposizioni

Disposizioni semplici (senza ripetizioni)

Una **disposizione semplice** di lunghezza k di elementi di un insieme S di n oggetti, con $k \leq n$, è una presentazione ordinata di k elementi di S nella quale non si possono avere ripetizioni di uno stesso oggetto. Per avere il numero di queste configurazioni si considera che il primo componente di una tale sequenza può essere scelto in n modi diversi, il secondo in $(n-1)$ e così via, sino al k -esimo che può essere scelto in $(n-k+1)$ modi diversi. Pertanto il numero $D_{n,k}$ di disposizioni semplici di k oggetti estratti da un insieme di n oggetti è dato da:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ad esempio le disposizioni semplici di lunghezza 2 degli elementi dell'insieme $\{1,2,3,4,5\}$ sono $5!/(5-2)! = 5!/3! = 120/6 = 20$: 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54.

Si osserva che le permutazioni sono casi particolari delle disposizioni semplici: le permutazioni di un insieme di n oggetti sono le disposizioni semplici di tali oggetti di lunghezza n . In effetti per il loro numero:

$$P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Disposizioni con ripetizioni

Una presentazione ordinata di elementi di un insieme nella quale si possono avere ripetizioni di uno stesso elemento si dice **disposizione con ripetizioni**. Cerchiamo il numero delle possibili sequenze di k oggetti estratti dagli elementi di un insieme di n oggetti, ognuno dei quali può essere preso più volte. Si hanno n possibilità per scegliere il primo componente, n per il secondo, altrettante per il terzo e così via, sino al k -esimo che completa la configurazione. Il numero cercato è pertanto:

$$D'_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ volte}} = n^k$$

Ad esempio le disposizioni con ripetizione di lunghezza 2 degli elementi di $\{1,2,3,4,5\}$ sono $5^2 = 25$: 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24, 25, 31, 32, 33, 34, 35, 41, 42, 43, 44, 45, 51, 52, 53, 54, 55.

Si osserva che può anche essere $k > n$

Combinazioni

Combinazioni semplici (senza ripetizioni)

Si chiama **combinazione semplice** una presentazione di elementi di un insieme nella quale non ha importanza l'ordine dei componenti e non si può ripetere lo stesso elemento più volte. La collezione delle combinazioni di k elementi estratti da un insieme S di n oggetti distinti si può considerare ottenuta dalla collezione delle disposizioni semplici di lunghezza k degli elementi di S ripartendo tali sequenze nelle [classi](#) delle sequenze che presentano lo stesso sottoinsieme di S e scegliendo una sola sequenza da ciascuna di queste classi. Ciascuna delle suddette classi di sequenza di lunghezza k contiene $k!$ sequenze, in quanto accanto a una sequenza σ si hanno tutte e sole quelle ottenibili permutando i componenti della σ . Quindi il numero delle combinazioni semplici di n elementi di lunghezza k si ottiene dividendo per $k!$ il numero delle disposizioni semplici di n elementi di lunghezza k :

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Di solito tra le diverse disposizioni semplici di una classe si sceglie come combinazione rappresentativa la sequenza nella quale i componenti compaiono in ordine crescente (tutti gli insiemi finiti possono avere gli elementi ordinati totalmente, ovvero associati biunivocamente ai primi interi positivi).

Ad esempio le combinazioni semplici di lunghezza 4 degli elementi di $\{1,2,3,4,5,6\}$ sono $6!/(4!2!) = 15$: 1234, 1235, 1236, 1245, 1246, 1256, 1345, 1346, 1356, 1456, 2345, 2346, 2356, 2456, 3456.

Combinazioni con ripetizioni

Quando l'ordine non è importante ma è possibile avere componenti ripetute si parla di **combinazioni con ripetizione**. Il numero di combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k è uguale a quello delle combinazioni senza ripetizione di $n+k-1$ oggetti di classe k ed è quindi uguale a:

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$
$$\binom{2+4-1}{4} = 5$$

Ad esempio, vi sono 5 modi di distribuire a 2 bambini distinguibili 4 caramelle indistinguibili, contando anche i casi in cui uno dei bambini non riceve nessuna caramella: 0-4, 1-3, 2-2, 3-1, 4-0. Oppure, le combinazioni con ripetizioni per n oggetti di classe k rappresentano il numero delle derivate parziali di ordine k calcolabili per una funzione a n variabili.