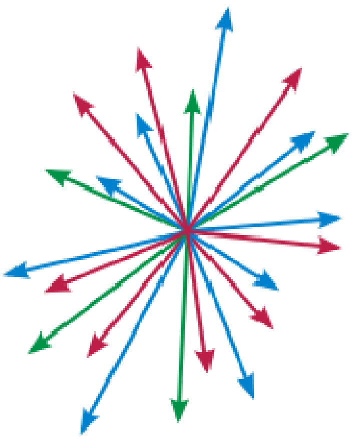
Spazio vettoriale

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

In matematica, lo **spazio vettoriale** (chiamato più raramente **spazio lineare**) è una struttura algebrica di grande importanza. Si tratta di una generalizzazione dell'insieme formato dai vettori del piano cartesiano ordinario e dell'insieme dei vettori dello spazio tridimensionale dotati delle operazioni di somma di vettori e di moltiplicazione di un vettore per un numero reale (cioè dell'ambiente nel quale si studiano i fenomeni della fisica classica, quella sviluppata da personalità quali Galileo, Newton, Lagrange, Laplace, Hamilton, Maxwell).

Si incontrano spazi vettoriali in numerosi capitoli della matematica moderna e nelle sue applicazioni: questi servono innanzi tutto per studiare le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari e delle equazioni differenziali lineari. Con queste equazioni si trattano moltissime situazioni: quindi si incontrano spazi vettoriali nella statistica, nella scienza delle costruzioni, nella meccanica quantistica, nella biologia molecolare, ecc. Negli spazi vettoriali si studiano anche sistemi di equazioni e disequazioni e in particolare quelli che servono alla programmazione matematica e in genere alla ricerca operativa.

Strutture algebriche preliminari agli spazi vettoriali sono quelle di gruppo, anello e campo. Vi sono poi numerose strutture matematiche che generalizzano e arricchiscono quella di spazio vettoriale; alcune sono ricordate nell'ultima parte di questo articolo.



Uno spazio vettoriale è una collezione di oggetti, chiamati "vettori", che possono essere sommati e riscalati.

Definizione formale

La definizione di uno spazio vettoriale richiede di servirsi di un campo: sono interessanti soprattutto il campo dei numeri reali **R** e quello dei complessi **C**; molti risultati dell'algebra lineare però si possono sviluppare servendosi del semplice campo dei numeri razionali **Q** e di notevole interesse sono anche i campi finiti e in particolare i campi delle classi di resto modulo *p* $\mathbf{F}_p$, per ogni *p* numero primo. In questa voce denotiamo con *K* un generico campo e indichiamo rispettivamente con 0 e 1 il suo zero e la sua unità.

Si dice che l'insieme *V* è sostegno di uno **spazio vettoriale** sul campo *K* se in *V* è definita un'operazione binaria interna (+) per la quale (*V*,+) è un gruppo commutativo (ossia un gruppo abeliano) ed è altresì definita una legge di composizione esterna (*) $K \times V \rightarrow V$ - detta *prodotto esterno* o moltiplicazione per uno scalare - per la quale valgono le seguenti proprietà:

1. □ *a*,*b* □ K, □ **v** □ V : *a* * (*b* * **v**) = (*a* * *b*) * **v**
   Associatività del prodotto esterno.
2. □ **v** □ V, 1 * **v** = **v**
   Neutralità di 1 rispetto al prodotto esterno.
3. □ *a* □ K, □ **u**, **v** □ V, *a* * (**u** + **v**) = *a* * **u** + *a* * **v**
   Distributività del prodotto esterno rispetto all'addizione di vettori.
4. □ *a*,*b* □ K, □ **v** □ V, (*a* + *b*) * **v** = *a* * **v** + *b* * **v**
   Distributività del prodotto esterno rispetto all'addizione di scalari.

La struttura algebrica così definità si simboleggia con (*V*, *K*) o semplicemente con *V* laddove non ci siano equivoci sul campo di definizione. Per uno spazio *V* sopra un campo *K* gli elementi di *K* sono detti **scalari** o *numeri*, mentre gli oggetti di *V* si dicono *vettori* o *punti*. I vettori si simboleggiano con caratteri in grassetto, sottolineati o sormontati da una freccia. Tale linguaggio consente di sostituire la dicitura *prodotto esterno* con *prodotto per uno scalare*.

Poiché la moltiplicazione per uno scalare è una legge di composizione esterna $K \times V \rightarrow V$ si dice che *V* ha struttura di spazio vettoriale *sinistro*. Nulla vieta di definire la composizione con uno scalare *a destra*; in tal caso si parlerà di spazio vettoriale *destro*.

Da queste proprietà, possono essere immediatamente dimostrate le seguenti formule, valide per ogni *a* in *K* e ogni **v** in *V*:

$$a * \mathbf{0} = 0 * \mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$-(a * \mathbf{v}) = (-a) * \mathbf{v} = a * (-\mathbf{v})$$

dove 0 è lo zero in *K* e **0** è lo zero in *V*.

Uno **spazio vettoriale reale** o **complesso** è uno spazio vettoriale in cui *K* è rispettivamente il campo **R** dei numeri reali o il campo **C** dei numeri complessi.

Primi esempi

Di seguito si elencano alcuni importanti esempi di spazi vettoriali; si denotano con *m* ed *n* due interi positivi.

Spazi K^n

L'insieme

$$K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in K\}$$

formato da tutte le sequenze finite e ordinate di elementi di *K*, con le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite termine a termine (*puntuali*), è detto l' ***n*-spazio numerico**, **spazio delle *n*-uple** o **spazio *n*-dimensionale delle coordinate** e può essere considerato il prototipo di spazio vettoriale.

Si osserva che gli spazi $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{C}^n$ posseggono una infinità continua di elementi, mentre $\mathbf{Q}^n$ ha cardinalità numerabile e per ogni p primo lo spazio $\mathbf{F}_p{}^n$ è costituito da un numero finito di vettori, per la precisione p^n.

Polinomi

L'insieme K $[x]$ dei polinomi a coefficienti in K e con variabile x, con le operazioni usuali di somma fra polinomi e prodotto di un polinomio per uno scalare, forma uno spazio vettoriale.

Matrici

L'insieme delle matrici $m \times n$ su K, con le operazioni di somma tra matrici e prodotto di uno scalare per una matrice, forma uno spazio vettoriale.

Funzioni

L'insieme $Fun(X, K)$ di tutte le funzioni da un fissato insieme X in K, dove:

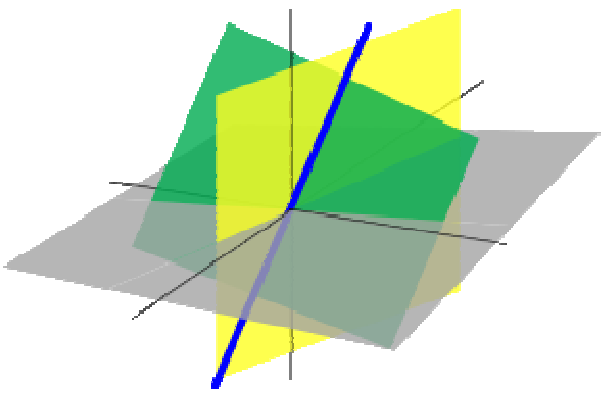
- la somma di due funzioni f e g è definita come la funzione $(f + g)$ che manda x in $f(x)+g(x)$,
- il prodotto (λf) di una funzione f per uno scalare λ in K è la funzione che manda x in $\lambda f(x)$ è uno spazio vettoriale.

Ad esempio, l'insieme $Fun(X, \mathbf{R})$ di tutte le funzioni da un aperto X dello spazio euclideo $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$ è uno spazio vettoriale.

Nozioni basilari

Lo studio della specie di struttura di spazio vettoriale si svolge sviluppando le nozioni di sottospazio vettoriale, di trasformazione lineare (l'omomorfismo per questa specie di struttura), di base e di dimensione.

Sottospazi [modifica]



Tre sottospazi distinti di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$: sono piani passanti per l'origine. Due di questi si intersecano in un sottospazio di dimensione 1, cioè una retta passante per l'origine (una di queste è disegnata in blu).

Un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale *V* è un sottoinsieme *W* che eredita da *V* una struttura di spazio vettoriale. Per ereditare questa struttura, è sufficiente che *W* sia chiuso rispetto alle due operazioni di somma e prodotto per scalare. In particolare, *W* deve contenere lo zero di *V*.

Esempi

Una retta passante per l'origine è un sottospazio vettoriale del piano cartesiano $\mathbf{R}^2$; nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ tutti i piani e tutte le rette passanti per l'origine sono sottospazi.

Gli spazi formati dalle matrici simmetriche o antisimmetriche sono sottospazi vettoriali dell'insieme delle matrici $m \times n$ su K.

Altri importanti sottospazi vettoriali sono quelli di $Fun(X, \mathbf{R})$, quando X è un insieme aperto di $\mathbf{R}^n$: gli insiemi formati dalle funzioni continue, dalle funzioni differenziabili e dalle funzioni misurabili.

Generatori e basi

Una combinazione lineare di alcuni vettori $v_1, \ldots, v_n$ è una scrittura del tipo

$$\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_n v_n.$$

Una combinazione lineare è l'operazione più generale che si può realizzare con questi vettori usando le due operazioni di somma e prodotto per scalare. Usando le combinazioni lineari è possibile descrivere un sottospazio (che è generalmente fatto da un insieme infinito di punti[1]) con un numero finito di dati. Si definisce infatti il sottospazio generato da questi vettori come l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari.

Un sottospazio può essere generato a partire da diversi insiemi di vettori. Tra i possibili insiemi di generatori alcuni risultano più economici di altri: sono gli insiemi di vettori con la proprietà di essere linearmente indipendenti. Un tale insieme di vettori è detto base del sottospazio.

Si dimostra che ogni spazio vettoriale possiede una base; alcuni spazi hanno basi costituite da un numero finito di vettori, altri hanno basi costituenti insiemi infiniti. Per questi ultimi la dimostrazione dell'esistenza di una base deve ricorrere al Lemma di Zorn.

Alla nozione di base di uno spazio vettoriale si collega quella di sistema di riferimento di uno spazio affine.

Dimensione

Si dimostra che tutte le basi di uno spazio vettoriale posseggono la stessa cardinalità (questo risultato è dovuto a Felix Hausdorff). Questa cardinalità viene chiamata **dimensione di Hamel** dello spazio; questa entità in genere viene chiamata semplicemente *dimensione dello spazio*. La distinzione più rilevante fra gli spazi vettoriali vede da una parte gli spazi finito-dimensionali e dall'altra quelli di dimensione infinita.

Per ogni intero naturale n lo spazio $\mathbf{K}^n$ ha dimensione n: in effetti una sua base è costituita dalle n n-uple aventi tutte le componenti nulle ad eccezione di una uguale alla unità del campo. In particolare l'insieme costituito dal solo 0 del campo può considerarsi uno spazio a 0 dimensioni, la retta dotata di un'origine è uno spazio monodimensionale su $\mathbf{R}$, il piano cartesiano è uno spazio di dimensione 2, lo spazio $\mathbf{R}^3$ ha dimensione 3.

Anche i polinomi con grado al più n formano un sottospazio vettoriale di dimensione $n+1$, mentre la dimensione dell'insieme delle funzioni $Fun(X, K)$ è pari alla cardinalità di X.

Tra gli spazi infinito dimensionali si trovano quelli formati dall'insieme dei polinomi in una variabile o in più variabili e quelli formati da varie collezioni di funzioni ad esempio gli spazi Lp.

I vettori di uno spazio di n dimensioni, facendo riferimento ad una base fissata di tale spazio, possono essere rappresentati come n-uple di scalari: queste sono le loro coordinate. Questo fatto consente di affermare che ogni spazio n-dimensionale su $\mathbf{K}$ è sostanzialmente identificabile con $\mathbf{K}^n$.

Trasformazioni lineari e omomorfismi

Una trasformazione lineare fra due spazi vettoriali V e W sullo stesso campo K è una applicazione che manda vettori di V in vettori di W rispettando le combinazioni lineari. Dato che le trasformazioni lineari rispettano le operazioni di somma di vettori e di moltiplicazioni per scalari, esse costituiscono gli omomorfismi per le strutture della specie degli spazi vettoriali. Per denotare l'insieme degli omomorfismi da V in W scriviamo $\mathrm{Hom}(V, W)$. Particolarmente importanti sono gli insiemi di endomorfismi; questi hanno la forma $\mathrm{Hom}(V, V)$.

Si osserva che per le applicazioni lineari di $\mathrm{Hom}(V, W)$ si possono definire le somme e le moltiplicazioni per elementi di K, come per tutte le funzioni aventi valori in uno spazio su questo campo. L'insieme $\mathrm{Hom}(V, W)$ munito di queste operazioni costituisce a sua volta uno spazio vettoriale su K, di dimensione $\dim(V)\times\dim(W)$. Un caso particolare molto importante è dato dallo spazio duale $V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$; questo spazio ha le stesse dimensioni di V e in effetti i suoi vettori sono strettamente collegati ai vettori di V.